COLOQUINHO IF UFRJ

ALGUNS EFEITOS DO VÁCUO QUÂNTICO

Yuri Muniz
Instituto de Física - UFRJ

O conceito de vácuo

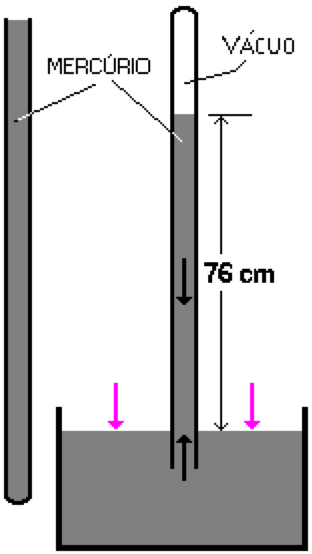
- O vácuo já atormentava filósofos da Grécia antiga;

Scuola di Atene (1509 – 1511) – Raffaello Sanzio

- De **Aristóteles** (384-322 a.C.) até o século XVII:
  “*Natura adbhorret vacuum*“

O CONCEITO DE VÁCUO

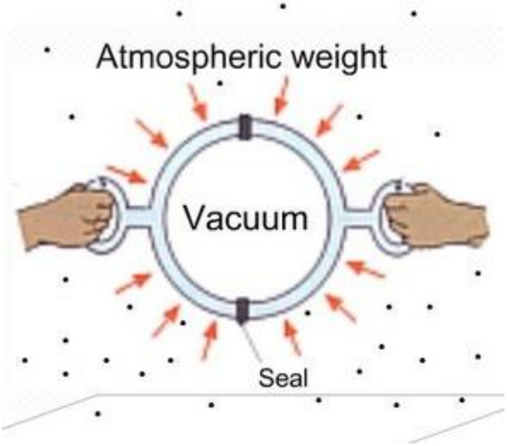
- O barômetro de mercúrio de **Torricelli** (1644):



- Torricelli em uma carta para Michelangelo Ricci: "*Noi viviamo sommersi nel fondo d'un pelago d'aria*" (Vivemos submersos no fundo de um oceano de ar)

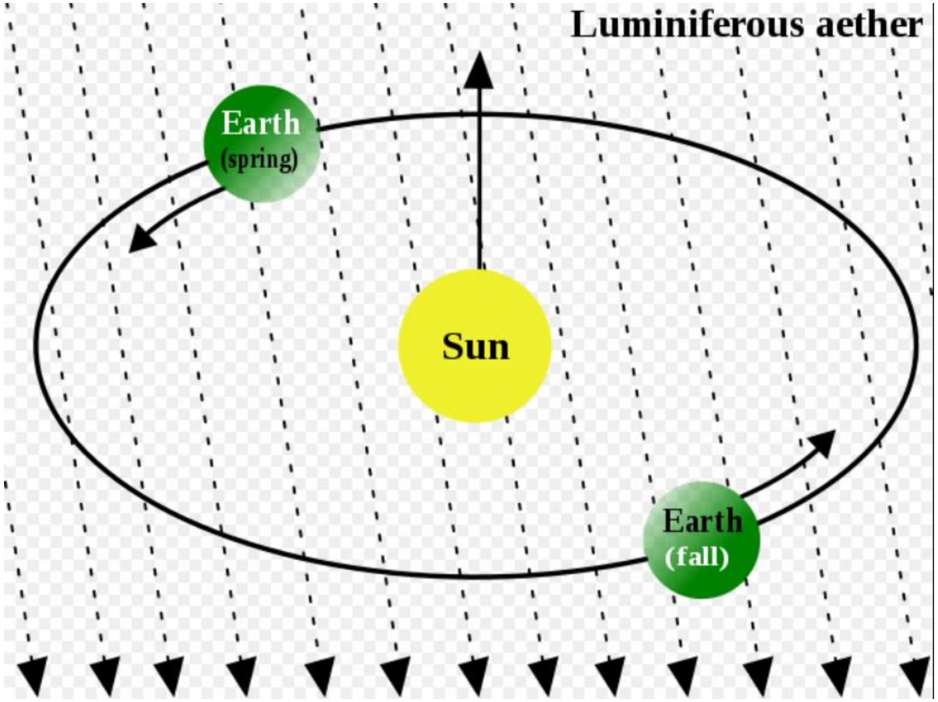
O CONCEITO DE VÁCUO

- O experimento dos hemisférios de Magdeburg realizado por **Otto von Guericke** (1657):



Vácuo e ondas eletromagnéticas

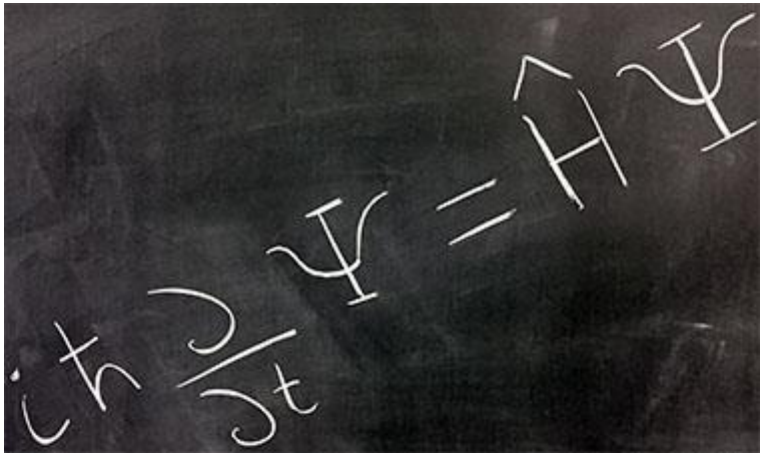
- Ondas eletromagnéticas: existe a necessidade de um éter luminífero?
- Não! Experimento de Michelson-Morley (1887):



- Vácuo clássico: espaço vazio, inerte e insensível a estímulos externos.

O advento da mecânica quântica

- Teoria revolucionária do início do séc XX

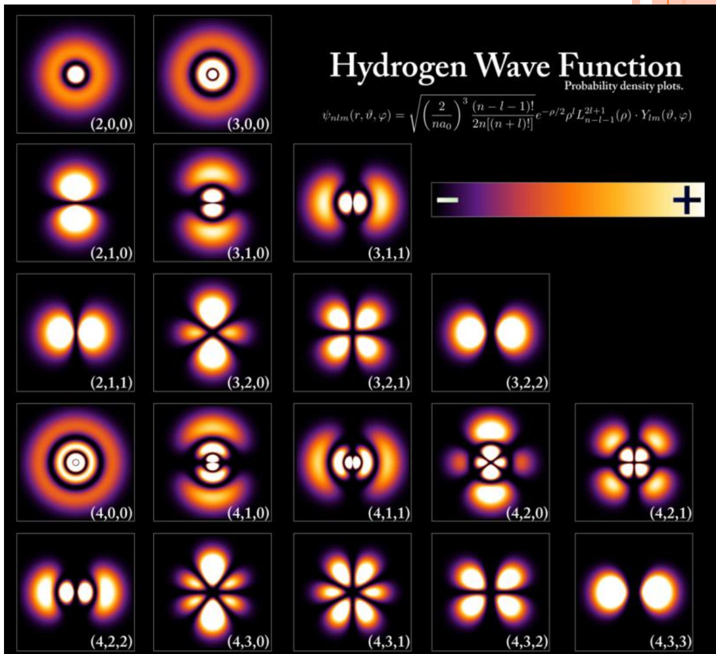


- Dualidade onda-partícula;
- Quantização da energia;
- Teoria probabilísitca;
- Princípio de incerteza:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

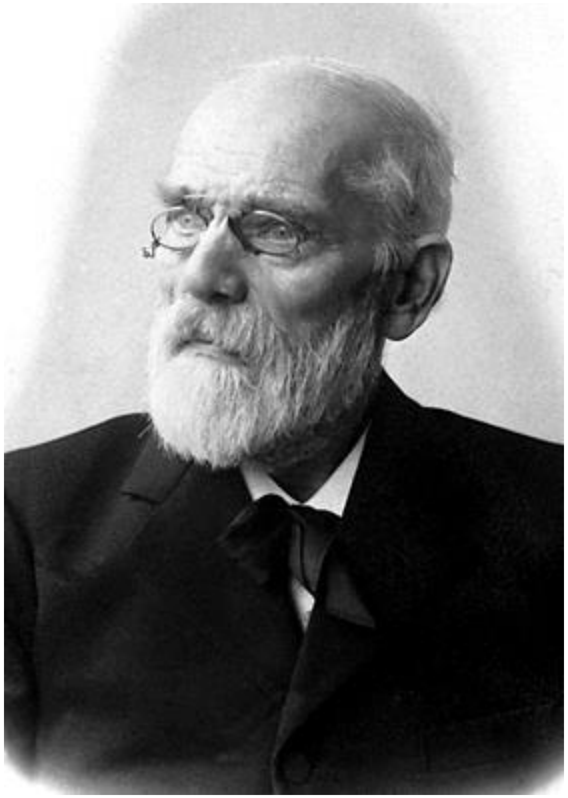
- Flutuações das grandezas físicas;

- Estabilidade do átomo.



Forças de van der Waals

- Johannes Diederik van der Waals (1837 – 1923): tamanho das moléculas e as forças intermoleculares.
- Equação de estados para gases reais (1873):



$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

James Clerk Maxwell:
"that there can be no doubt that the name of Van der Waals will soon be among the foremost in molecular Science"

Forças de van der Waals

- Forças de van der Waals de **orientação**: moléculas polares, interação dipolo-dipolo permanente

$$U = -\frac{2p_1^2p_2^2}{3(4\pi\epsilon_0)^2K_BT}\frac{1}{r^6}\;; \qquad K_BT \gg \frac{p_1p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- Força de van der Waals de **indução**: molécula polar induz um momento de dipolo na molécula apolar, dando origem à interação. Como $\mathbf{p}_2 = \alpha_2\mathbf{E}_1$:

$$U_{21} \sim -\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{E}_1 \sim -\alpha_2\mathbf{E}_1^2 \sim -\frac{\alpha_2p_1^2}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{1}{r^6}$$

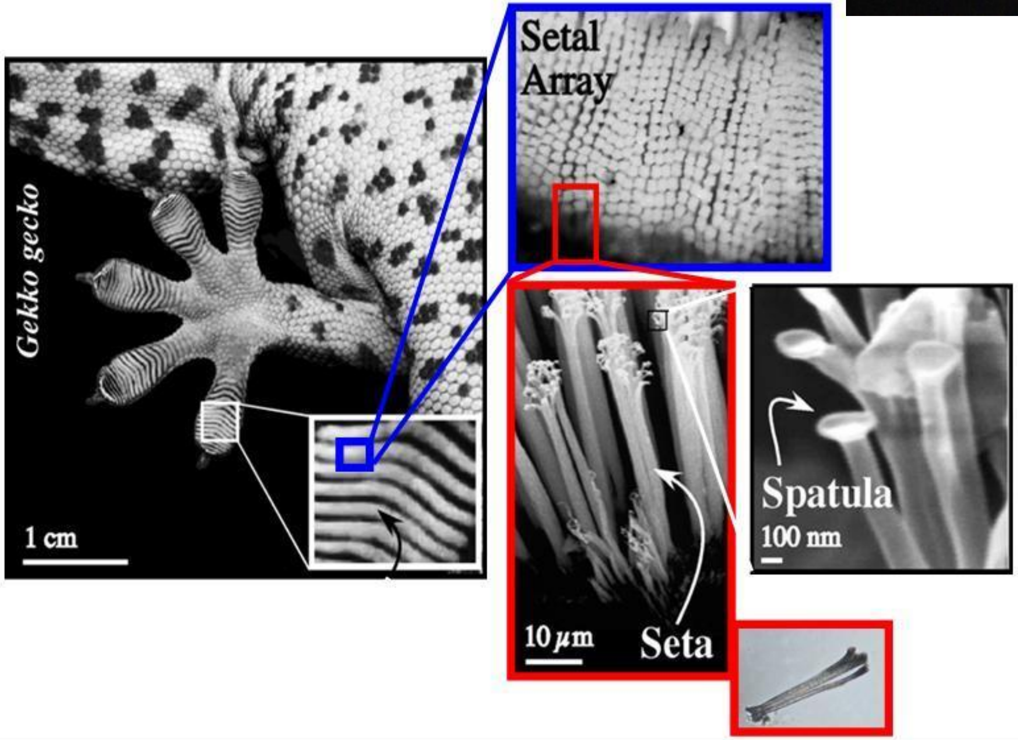
- Força de van der Waals de **dispersão**: moléculas apolares!
- Explicação via mecânica quântica (London 1930). Origem nas flutuações quânticas das distribuições de carga.

$$U_{\mathrm{Lon}}(r) \approx -\frac{3\hbar\omega_0\alpha^2}{4r^6} \implies \vec{f}_{\mathrm{Lon}} \approx -\frac{9\hbar\omega_0\alpha^2}{2r^7}\,\hat{r}$$

Forças de van der Waals dispersivas

Força responsável pelo mecanismo de adesão das lagartixas

K. Autumn *et al* **PNAS** 2002



Patas com milhões de cerdas (500.000/cm^2) divididas em filamentos ainda menores (5000/cerda).

1 cerda: $F \approx 20\mu N$

Forças dispersivas

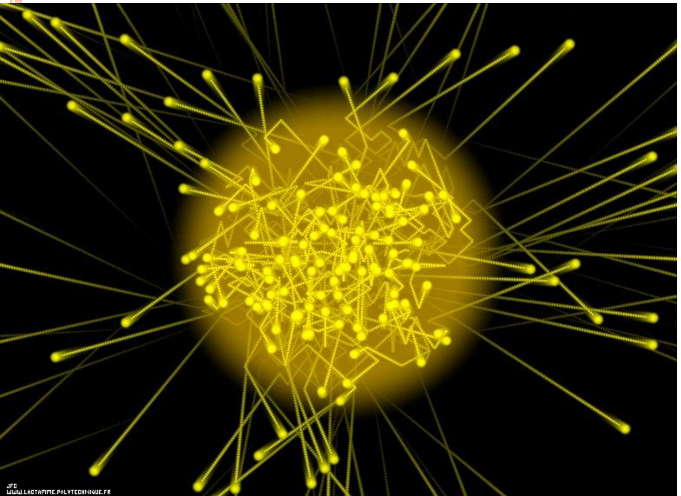
- Experimento utilizando material sintético copiando as patas da lagartixa.

Geim *et al* **Nature** 2003

A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA (EDQ)

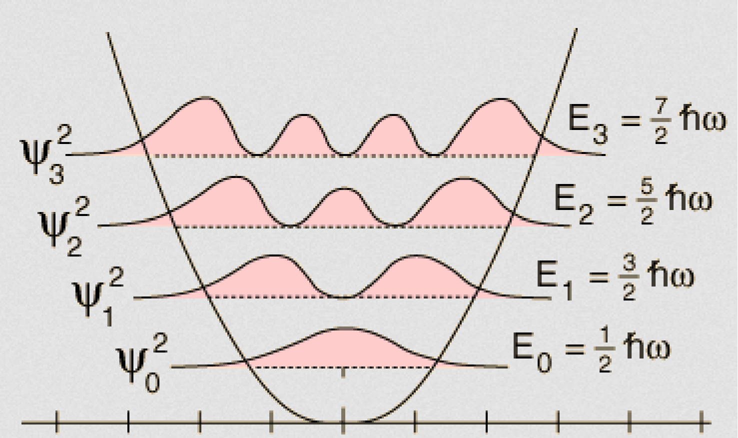
- Teoria quântica do eletromagnetismo. Descreve a interação radiação-matéria.
- Descrição da luz em termos de quanta de energia (fótons).

- O campo eletromagnético livre é descrito por um conjunto infinito de osciladores harmônicos quânticos desacoplados.



O oscilador harmônico quântico

- Hamiltoniano: $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$
- Espectro de energia: $$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \; , \; n = 0, 1, 2, \ldots$$
- "n" quanta de energia.



<u>Energia de ponto zero (EPZ):</u>

$$E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Energia do campo eletromagnético

- Autoenergias do campo eletromagnético livre (na ausência de cargas e correntes):

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(n_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_k$$

$\mathbf{k}$ → Vetor de onda do fóton. α → Polarização do fóton.

$n_{\mathbf{k}\alpha}$ → Número de fótons com vetor de onda $\mathbf{k}$ e polarização α .

$\omega_k = kc$ → Frequência angular de oscilação.

<u>**EPZ:**</u> $$E_o = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{2} \hbar\omega_k = \infty$$

- **Vácuo quântico**: longe de ser um espaço "vazio"!

Princípio de incerteza e EPZ

- Veremos como a EPZ está fundamentalmente atrelada ao princípio de incerteza.

$$E = \langle H \rangle = \frac{\langle P^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \langle X^2 \rangle$$
$$= \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (\Delta x)^2$$

Usando a relação de incerteza mínima

$$\Delta p = \frac{\hbar/2}{\Delta x}$$

e minimizando a energia obtemos:

$$E(\Delta x) = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 (\Delta x)^2$$

$$\frac{dE(\Delta x)}{d(\Delta x)} = 0 \implies E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Flutuações quânticas do vácuo $\Longrightarrow$ **EPZ**

Efeitos o vácuo quântico

O desvio Lamb

- Espectro **não-relativístico** do átomo de hidrogênio (Equação de **Schrödinger**):

$$E_n = -\frac{C}{n^2}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Não depende dos números quânticos l e m. Degenerescência!

- Espectro **relativístico** do átomo de hidrogênio (Equação de **Dirac**):

$$E_{nj} = mc^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

- Degenerescência residual: (Ex: $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$)

O desvio Lamb

- **Lamb** e **Retherford** (1947) verificaram experimentalmente que na verdade:

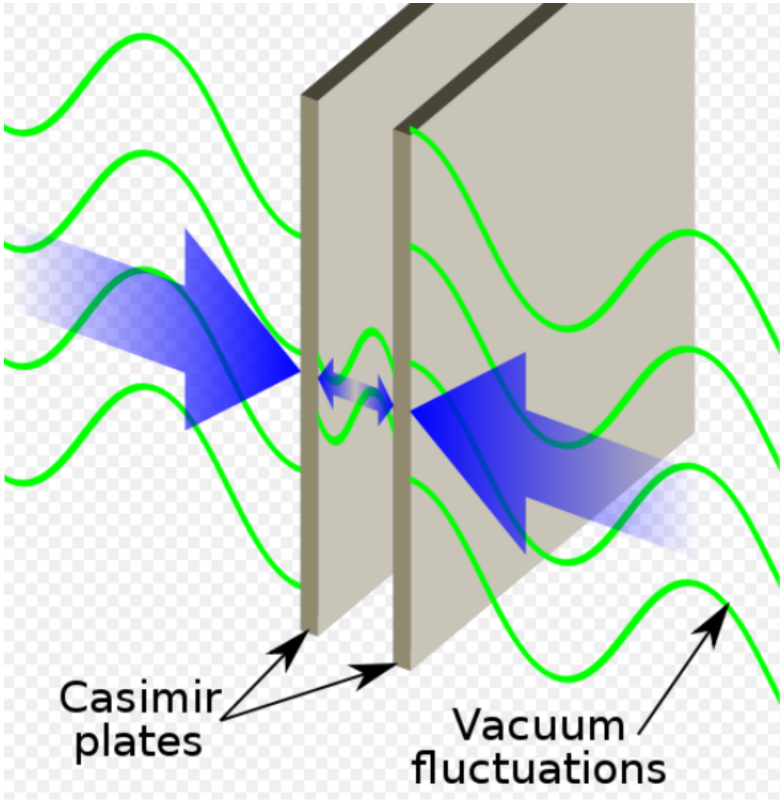
$$E(2s_{1/2}) - E(2p_{1/2}) \approx 1\,GHz$$

- **Hans Bethe** (1947) soluciona o problema considerando o acoplamento do elétron com o campo quantizado.
- Interpretação: renormalização da massa do elétron.

Dirac:
"Nenhum progresso foi feito por 20 anos. Então veio um avanço, iniciado pela descoberta de Lamb e explicação do desvio Lamb, que fundamentalmente mudou o caráter da física teórica."

O efeito Casimir

- **Hendrik Brugt Gerhard Casimir** (1948): atração entre duas placas paralelas, neutras e condutoras no vácuo.



$$\frac{F(a)}{L^2} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

$$a = 1\ \mu m \Longrightarrow P_{Cas} \approx 10^{-8}\, P_{atm}$$

$$L^2 = 1\ cm^2 \Longrightarrow F \approx 10^{-7} N$$

O efeito Casimir e as forças dispersivas

- O efeito Casimir tem origem nas forças de van der Waals dispersivas.

- Estabilidade de colóides: desacordo entre teoria e experimento. A força de interação deveria cair mais rápido que $1/r^7$ para grandes distâncias.

- Conjectura de **Overbeek**: efeitos de retardamento a partir de distâncias tais que $r/c \sim 1/\omega_{mn}$

- **Casimir** e **Polder** (1948): "*The Influence of Retardation on the London-vdW Forces*".

$$U_{\mathrm{Ret}}(r) = -\frac{23\hbar c}{4\pi}\,\frac{\alpha_A\alpha_B}{r^7} \implies f_{\mathrm{Ret}} \sim \frac{1}{r^8}$$

O efeito Casimir e as forças dispersivas

- Esse resultado foi obtido após cálculos muito longos em teoria de perturbação de quarta ordem em EDQ.

- Comentario de **Casimir** e **Polder** ao final do artigo de 1948: *"The very simple form of Eq. (56) and the analogous formula (25) suggest that it might be possible to derive these expressions, perhaps apart from the numerical factors, by more elementary considerations. This would be desirable since it would also give a more physical background to our result, a result which in our opinion is rather remarkable. So far we have not been able to find such a simple argument."*

O efeito Casimir e as forças dispersivas

- **A conversa com Niels Bohr e a energia de ponto-zero:** *'In the summer or autumn 1947 ... (but I am not absolutely certain that it was not somewhat earlier or later) I mentioned my results to Niels Bohr, during a walk. "That is nice", he said, "That is something new." I told him that I was puzzled by the extremely simple form of the expressions for the interaction at very large distance and he mumbled something about* **zero-point energy***. That was all, but it put me on a new track.'*

O efeito Casimir e as forças dispersivas

- *"I found that calculating changes of zero-point energy really leads to the same results as the calculations of Polder and myself...*" (Colloque sur la theorie de la liaison chimique, Paris, abril de 1948).
- Publicado em : *J :Chim:Phys:* **46**; 407 **1949**

- "*On 29 May, 1948, I presented my paper On the attraction between two perfectly conducting .. at ... It was published in the course of the year..*"
- Publicado em : *Proc: K: Ned: Akad: Wet:* **51**; 793 (1948)

O MÉTODO DE CASIMIR

- A novidade do efeito Casimir não reside no fato de dois corpos neutros e sem multipolos permanentes se atraírem, mas sim no método utilizado.

- Energia do vácuo do campo eletromagnético:

$$E_o = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{2} \hbar\omega_k = \infty$$

- No entanto, a presença de corpos altera o vácuo! Idealizando, podemos tratar as placas como condutores perfeitos. Os campos devem satisfazer

$$\vec{E} \times \hat{n}|_{placas} = \vec{0}\,; \qquad \vec{B} \cdot \hat{n}|_{placas} = 0\,.$$

- Restrição sobre os possíveis vetores $\mathbf{k}$!

O método de Casimir

- A energia de interação eletromagnética entre as placas deve ser a diferença de energia do campo na ausência e na presença de placas.

- Mas ambas as energias são infinitas... Faz-se necessário a introdução de um parâmetro regularizador ***s***.

$$\mathcal{E}_{Cas} := \lim_{s\to 0}\left[\left(\sum_{\vec{k}\alpha}\frac{1}{2}\,\hbar\omega_{\vec{k}}\right)_I - \left(\sum_{\vec{k}\alpha}\frac{1}{2}\,\hbar\omega_{\vec{k}}\right)_{II}\right]$$

I – regularizada e com condições de contorno.

II – regularizada mas sem condições de contorno.

Um exemplo simplificado: efeito Casimir em uma dimensão

- Condição de contorno (CC): o campo (em 1D) se anula em x = 0 e x = a (Dirichlet).
- CC $\Longrightarrow \omega_n = |k_x| c = n\pi c/a$
- EPZ com CC não regularizada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\hbar\omega_n = \frac{\hbar\pi c}{2a}\sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{\hbar\pi c}{2a}\Big(1+2+3+\ldots\Big)$$

- EPZ sem CC não regularizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2\pi} dk_x \frac{1}{2}\hbar|k_x|\, c = \frac{a\hbar c}{2\pi}\int_0^{\infty} d\kappa\, \kappa$$

Um exemplo simplificado: efeito Casimir em uma dimensão

- Inserindo o parâmetro regularizador ϵ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c(a) &= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{\hbar c}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}e^{-\epsilon\, n\pi/a} - \frac{a\hbar c}{2\pi}\int_0^{\infty} d\kappa\,\kappa\, e^{-\epsilon\,\kappa}\right\} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{\hbar c}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\epsilon\, n\pi/a} + \frac{a\hbar c}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)\int_0^{\infty} d\kappa\, e^{-\epsilon\,\kappa}\right\} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{-\frac{\hbar c}{2}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{1}{e^{\epsilon\pi/a}-1}\right) + \frac{a\hbar c}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right\} \\
&= \frac{\hbar c\pi}{8a}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\mathsf{senh}^2(\epsilon\pi/2a)} - \left(\frac{2a}{\pi\epsilon}\right)^2\right\}.
\end{aligned}$$

- Ambos os termos divergem para $\epsilon \to 0$, porém:

$$\frac{1}{\mathsf{senh}^2(\epsilon\pi/2a)} = \left(\frac{2a}{\pi\epsilon}\right)^2 - \frac{1}{3} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \implies \mathcal{E}_c(a) = -\frac{\hbar\pi c}{24a}$$

Solução alternativa

- O conceito de extensão analítica: todos conhecemos a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

- Essa representação vale para $|x| < 1$. Porém, a função

$$\frac{1}{1-x} = h(x)$$

não é definida apenas em $x = 1$. Podemos dizer que h é a extensão analítica da série em vermelho.

- Todavia, para $x = 2$ a série é divergente!

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \left.\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right|_{x=2} = \infty$$

- Mas a função h não é! "Podemos" escrever

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1.$$

Solução alternativa

- Para a EPZ em 1D:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\hbar\omega_n = \frac{\hbar\pi c}{2a}\sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{\hbar\pi c}{2a}\Big(1+2+3+\ldots\Big)$$

- A série em rosa diverge! Porém

$$(1+2+3+\ldots) = \left(\frac{1}{1^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\bigg|_{s=-1}$$

- Para $Re(s) > 1$, a série coincide com a função zeta de Riemann, definida em todo plano complexo. Portanto

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right\}_{ext.analitica} = \zeta_R(s)$$

- A zeta de Riemann é a extensão analítica da série. Se tomarmos no lugar da série, sua extensão analítica...

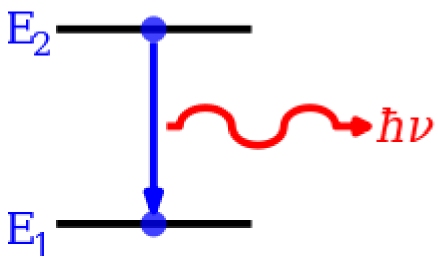
$$1+2+3+4+\cdots = \zeta_R(-1) = -\frac{1}{12} \implies \mathcal{E}_c(a) = -\frac{\hbar\pi c}{24a}.$$

Solução alternativa

- **O Ministerio da Educação adverte**: o uso prolongado dessa explicação para o valor finito de série divergente pode causar danos a sua saúde matemática; aprenda logo extensão analítica em Métodos Matemáticos. (**M. V. Cougo-Pinto**)

Emissão espontânea(EE)

- Átomo excitado, mesmo que isolado de tudo, acaba decaindo para o estado fundamental.



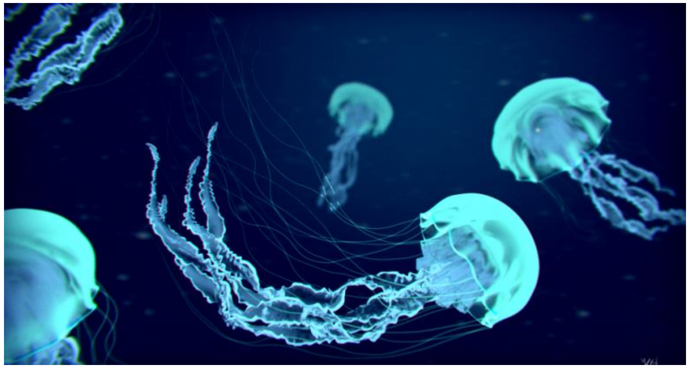
- Razão: Um átomo, mesmo no vácuo, jamais deixa de ser afetado pelas flutuações quânticas do campo.

- Não pode ser entendido somente com mecânica quântica usual, pois nesse contexto o estado excitado é estacionário.

- Porém, átomo excitado + zero fóton não é um estado estacionário do Hamiltoniano do sistema átomo-campo

EE

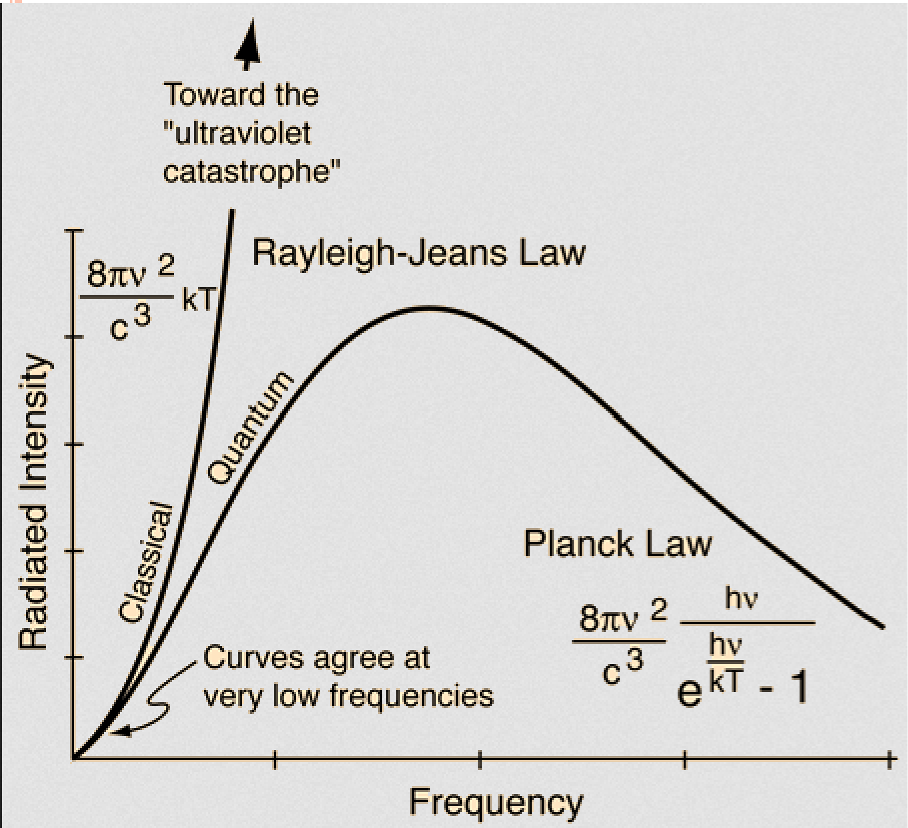
- O fenômeno é muito presente em nossas vidas. Praticamente toda a luz que vemos é proveniente de emissão espontânea!



Uma breve história

- Teoria de Planck sobre radiação de corpo negro (1900):

$$\rho_{em}(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/K_BT} - 1}$$



Mesmo após o grande avanço de Planck, ainda tentavam entender a origem da lei de Planck de um ponto de vista mais fundamental.

Uma breve história

- Einstein em 1916 escreveu uma carta para seu amigo Michele Besso onde disse:

  "*A splendid light has dawned on me about the absorption and emission of radiation*"

- Coeficientes A e B de Einstein (1917): introduz a ideia emissão espontânea e estimulada e, com isso, reobtém o espectro de Planck.

- N_1 átomos com energia E_1 e N_2 com energia E_2

Uma breve história

- Equilíbrio térmico:

$$(\dot{N}_1)_{abs} + (\dot{N}_1)_{est} + (\dot{N}_1)_{esp} = 0$$

- As taxas de emissão e absorção são dadas por:

$$(\dot{N}_1)_{abs} = -B_{12} N_1 \rho(\omega_o) \quad , \quad (\dot{N}_1)_{est} = B_{21} N_2 \rho(\omega_o) \quad ,$$

$$(\dot{N}_1)_{esp} = A_{21} N_2$$

- Einstein utilizou ainda a teoria de Bohr , $\omega_o = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ e a teoria de Boltzmann $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\hbar\omega_o/K_b T}$.

$$\Longrightarrow \quad \rho_{em}(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3 / c^3}{e^{h\nu/K_B T} - 1}$$

Uma breve história

- Einstein calculou ainda a razão entre as taxas de emissão espontânea e estimulada que, para o espectro visível é (para temperatura ambiente):

$$\frac{A_{21}}{B_{21}\rho(\omega_0)} = e^{h\nu/K_B T} - 1 \approx 10^{39}$$

- EE é muito mais comum!

- Mesmo para uma fonte térmica como o **sol** (T = 6000K), a taxa de EE ainda é centenas de vezes maior que a taxa de emissão estimulada.

UMA BREVE HISTÓRIA

- Dirac (1927): "*The quantum theory of the emission and absorption of radiation*".
- Obteve a taxa de emissão espontânea de um átomo utilizando a EDQ.

$$\Gamma_{21}^{(0)} = \frac{4}{3}\frac{|\mathbf{d}_{21}|^2\omega_{21}^3}{\hbar}$$

- Na verdade, nesse artigo ele desenvolve por completo o formalismo da EDQ **não-relativística** e aplica em processos de emissão e absorção da luz.

EE E FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS

- A EE está relacionada as flutuações quânticas do vácuo. De fato, ela pode ser pensada, em partes, como uma emissão estimulada pelas flutuações. Tomemos

$$A_{21} = B_{21}\rho_{pz}(\omega_o) \quad , \quad \rho_{pz}(\omega_o)$$ → Densidade de EPZ ,

$$\begin{aligned}
\rho_{pz}(\omega_o) &= \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_o\right)\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=1}^{2}\delta(\omega_k-\omega_o) \\
&= \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_o\right)\frac{1}{V}\frac{2V}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,\delta(\omega_k-\omega_o) \\
&= \frac{\hbar\omega_o^3}{2\pi^2c^3}
\end{aligned}$$

$$B_{21} = \frac{4\pi^2|\mathbf{d}_{21}|^2c^3}{3\hbar^2}$$ → Cálculo de mecânica quântica usual.

EE e flutuações quânticas

$$\Longrightarrow \quad A_{21} = \frac{2|\mathbf{d}_{21}|^2\omega_o^3}{3\hbar}$$

- A taxa de EE devido a densidade de energia de ponto zero é metade do valor obtido por Dirac!

- De fato, a EE é um efeito devido também a reação de radiação. Tanto o campo de radiação quanto as flutuações do vácuo contribuem igualmente para a emissão.

O EFEITO PURCELL

- Edward Mills Purcell (1946) descobre que objetos na vizinhança de sistemas atômicos alteram a taxa de emissão espontânea

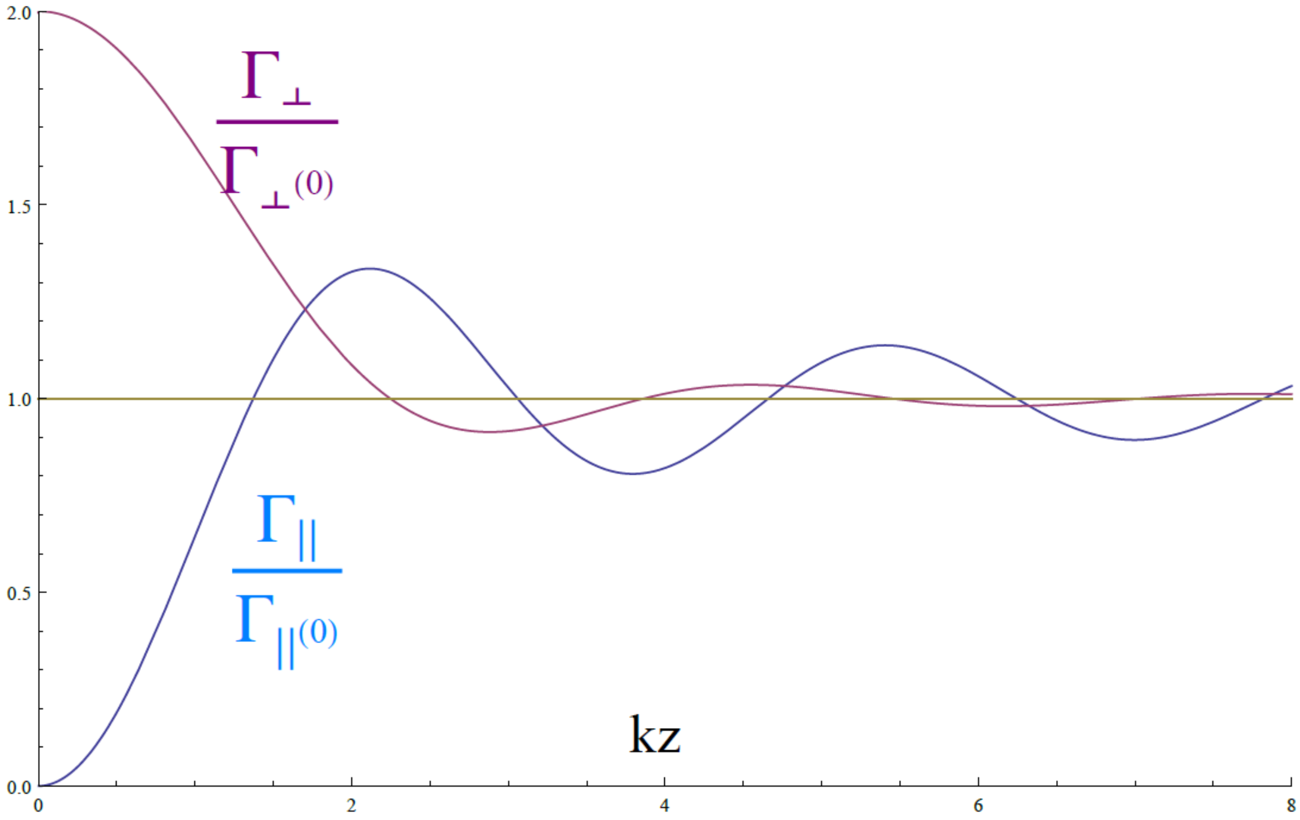
- Razão: a presença de objetos altera o vácuo e consequentemente a densidade de EPZ.

$$\Gamma(\mathbf{R}) = \frac{\pi}{\epsilon_o \hbar} \sum_{\mathbf{ke}} \omega_k |\mathbf{d}_{eg} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{ke}}(\mathbf{R})|^2 \delta(\omega_k - \omega_{eg})$$

Inicialmente os físicos se mostraram incrédulos, afinal, como o átomo pode perceber a fronteira sem antes emitir um fóton para interagir?

O EFEITO PURCELL

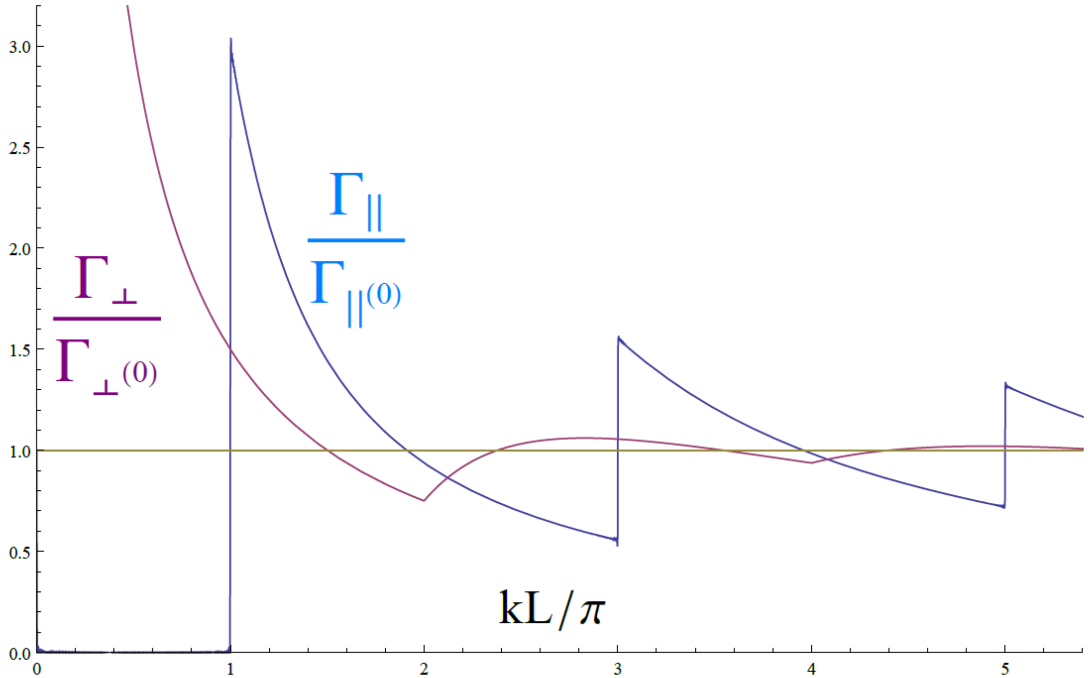
- O fato é que o efeito Purcell ocorre. Corpos na vizinhança de um átomo podem aumentar, diminuir ou até mesmo suprimir a EE.

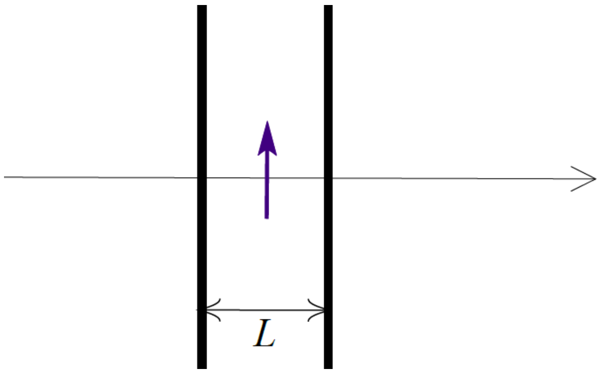


Átomo a uma distância z de uma placa perfeitamente condutora.

A supressão da EE de um fóton

- Em certas ocasiões, a EE pode ser até mesmo suprimida





- Se o momento de dipolo for paralelo às placas, para distâncias muito pequenas:

$$\mathbf{d}_{eg} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{ke}}(\mathbf{R}) = 0 \implies \textbf{Supressão}$$

Comentários finais

- Apesar de todas as discussões sobre a EPZ, é inegável que as flutuações quânticas do vácuo tem consequências mensuráveis em física!

- Esse seminário foi apenas uma pequena amostra de fenômenos interessantes associados ao vácuo quântico.

- Outros exemplos: criação de par elétron-pósitron pela aplicação de campo externo, efeito Casimir dinâmico, efeito Unruh-Davies, momento anômalo do elétron, entre outros.

Principais referências

- S K Lamoreaux, *Physics Today*, **February** (2007) 40.
- C. Farina, *Braz. J. Phys*. **36** (2006) 1137-1149.
- C. Farina, F C Santos and A C Tort, *Am. J. Phys*. **67** (1999) 344.
- P.W. Milonni, *Am. J. Phys*. **52** (1984) 340.

- P.W. Milonni, *The Quantum Vacuum*, Academic Press (1993)


That's all Folks!